# SỰ DUY NHẤT VÀ TÍNH LIÊN TỤC LIPSCHITZ CỦA NGHIỆM BÀI TOÁN CÂN BẰNG ĐỐI XỨNG ĐA TRỊ TRONG KHÔNG GIAN MÊTRIC

*Lâm Quốc Anh*[1] *và Trần Ngọc Tâm*[2]

## ABSTRACT

*We consider multivalued symmetric equilibrium problems of both weak and strong types in metric spaces. Sufficient conditions for the local uniqueness and Lipschitz continuity of the solutions are established. Our results are new or include special cases recent existing results.*

***Keywords: Symmetric equilibrium problems, Lipschitz continuity, Equilibrium, problem, Variational inequalities***

***Title: Uniqueness and Lipschitz continuity of the solutions to multivalued symmetric equilibrium problems in metric spaces***

## TÓM TẮT

*Chúng ta xét bài toán cân bằng đối xứng đa trị trong không gian mêtric cho cả dạng yếu và dạng mạnh. Nghiên cứu các điều kiện đủ cho sự duy nhất địa phương và tính liên tục Lipschitz của nghiệm. Các kết quả của chúng tôi là mới hoặc mở rộng các kết quả đã có.*

***Từ khóa: Bài toán cân bằng đối xứng, tính liên tục Lipschitz, bài toán cân bằng, bất đẳng thức biến phân***

## 1 GIỚI THIỆU

Bài toán cân bằng được Blum và Oettli giới thiệu năm 1994. Ở đó, tác giả xem bài toán này là mô hình tổng quát của bài toán tối ưu và bài toán bất đẳng thức biến phân. Về sau các nhà toán học còn nhận thấy rằng, bài toán cân bằng còn chứa được nhiều bài toán quan trọng khác nữa như bài toán điểm bất động, bài toán điểm trùng, bài toán cân bằng Nash, ... Đến nay, bài toán này đã được nghiên cứu và mở rộng rất nhiều so với bài toán gốc cho cả các lĩnh vực tồn tại nghiệm, ổn định nghiệm và thuật toán giải. Một trong những mô hình mở rộng của bài toán này là bài toán cân bằng đối xứng do Noor và Oettli đưa ra năm 1994. Tính ưu việt của bài toán cân bằng đối xứng là sự tiện lợi khi ta áp dụng vào các trường hợp thực tế. Đặc biệt là những tình huống có tính đối kháng như bài toán cạnh tranh kinh tế, lý thuyết trò chơi,... Trong các bài báo của Fu (2003) và Farajzadeh (2006) đã mở rộng cho trường hợp hàm vectơ đơn trị. Trong bài báo của Anh-Khanh (2007) đã nghiên cứu mô hình bài toán cân bằng đối xứng với hàm mục tiêu là ánh xạ vectơ đa trị. Tuy nhiên, cho đến nay hầu hết những công trình chỉ nghiên cứu vấn đề sự tồn tại nghiệm của lớp bài toán này. Đây là vấn đề trọng tâm của mọi lớp bài toán. Vấn đề quan trọng kế tiếp là sự ổn định nghiệm, được nhiều người tập trung nghiên cứu trong khoảng 5 năm gần đây, nhưng hầu hết chỉ tập trung cho lớp bài toán cân bằng. Hiện nay, chúng tôi chỉ tìm thấy các bài báo Anh-Khanh (2008)

[1] Khoa Sư phạm, Trương Đại học Cần Thơ
[2] Khoa Cơ bản, Trường Đại học Tây Đô

và Yuan-Gong (in press) nghiên cứu về tính ổn định theo nghĩa nửa liên tục của ánh xạ nghiệm của bài toán cân bằng đối xứng. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu tính ổn định nghiệm theo nghĩa liên tục Lipschitz của ánh xạ nghiệm của bài toán cân bằng đối xứng đa trị trong không gian vectơ mêtric. Theo định lý Rademacher thì một hàm số liên tục Lipschitz trong $R^n$ là khả vi hầu khắp nơi. Do đó, tính ổn định này rất gần với tính khả vi của ánh xạ nghiệm. Đây là vấn đề chưa được bài báo nào đề cập đến ngay cả cho lớp bài toán cân bằng.

Trong bài báo này, nếu không giả thiết gì thêm, ta xét $X, Y, Z$ là các không gian vectơ mêtric, $M$ và $\Lambda$ là các không gian mêtric. Xét $K \subseteq X$, $D \subseteq Y$ và $C \subseteq Z$ với $C$ là tập lồi và int$C \neq \emptyset$. Cho $S: \Lambda \to 2^K$, $T: \Lambda \to 2^D, F: K \times D \times K \times M \to 2^Z$ và $G: K \times D \times D \times M \to 2^Z$ là các ánh xạ đa trị. Với mỗi $\lambda \in \Lambda$ và $\mu \in M$, ta xét hai bài toán cân bằng vectơ đối xứng phụ thuộc tham số như sau.

$(SVEP_1)$: Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in K \times D$ sao cho $\bar{x} \in S(\lambda), \bar{y} \in T(\lambda)$ và

$$F(\bar{x}, \bar{y}, x, \mu) \cap (Z \backslash -\text{int}C) \neq \emptyset, \ \forall x \in S(\lambda),$$

$$G(\bar{x}, \bar{y}, y, \mu) \cap (Z \backslash -\text{int}C) \neq \emptyset, \forall y \in T(\lambda).$$

$(SVEP_2)$: Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in K \times D$ sao cho $\bar{x} \in S(\lambda), \bar{y} \in T(\lambda)$ và

$$F(\bar{x}, \bar{y}, x, \mu) \subseteq (Z \backslash -\text{int}C), \ \forall x \in S(\lambda),$$

$$G(\bar{x}, \bar{y}, y, \mu) \subseteq (Z \backslash -\text{int}C), \forall y \in T(\lambda).$$

Ta ký hiệu $S_1(\lambda, \mu)$ và $S_2(\lambda, \mu)$ lần lượt là hai tập nghiệm của $(SVEP_1)$ và $(SVEP_2)$ tại $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M$.

**Định nghĩa 1.1:** Ánh xạ $S: \Lambda \to 2^X$ được gọi là $l$-Lipschitz địa phương tại $\lambda_0 \in \Lambda$, nếu có một lân cận $N$ của $\lambda_0$ sao cho với mọi $\lambda_1, \lambda_2 \in N$, ta có:

$$S(\lambda_1) \subseteq S(\lambda_2) + lB_X(0, d(\lambda_1, \lambda_2)),$$

với $l > 0$ và $B_X$ là quả cầu mở đơn vị trong $X$.

**Định nghĩa 1.2:** Ánh xạ $F: X \times Y \times M \to 2^Z$ được gọi là $h.m.n$-Lipschitz địa phương tại $(x_0, y_0, \mu_0)$, nếu tồn tại các lân cận $N_1$ của $x_0$, $N_2$ của $y_0$ và $N_3$ của $\mu_0$ sao cho với mọi $(x_1, y_1, \mu_1), (x_2, y_2, \mu_2) \in N_1 \times N_2 \times N_3$, ta có:

$$F(x_1, y_1, \mu_1) \subseteq F(x_2, y_2, \mu_2) + B_Z(0, hd(x_1, x_2) + md(y_1, y_2) + nd(\mu_1, \mu_2)),$$

với $h, m, n > 0$.

**Định nghĩa 1.3:** (i) Ánh xạ $G: X \times X \to 2^Z$ được gọi là tựa đơn điệu loại 1 trên $A \subset X$, nếu với mọi $x, y \in A, x \neq y$, ta có:

$$[G(x, y) \subseteq -\text{int}C] \Rightarrow [G(y, x) \not\subseteq -\text{int}C].$$

(ii) Ánh xạ $G: X \times X \to 2^Z$ được gọi là tựa đơn điệu loại 2 trên $A \subset X$, nếu với mọi $x, y \in A, x \neq y$, ta có:

$$[G(x, y) \not\subseteq Z \backslash -\text{int}C] \Rightarrow [G(y, x) \subseteq Z \backslash -\text{int}C].$$

**Định nghĩa 1.4:** (i) Ánh xạ $G: X \times X \to 2^Z$ được gọi là $l$-Lipschitz giả đơn điệu mạnh loại 1 trên $S \subset X$, nếu với mọi $x, y \in S, x \neq y$, ta có:

$$[G(x, y) \not\subseteq -\text{int}C] \Rightarrow [G(y, x) + l\, B_Z(0, d(x, y)) \subseteq -C].$$

(ii) Ánh xạ $G: X \times X \to 2^Z$ được gọi là $l$-Lipschitz giả đơn điệu mạnh loại 2 trên $S \subset X$, nếu với mọi $x, y \in S, x \neq y$, ta có:

$[G(x,y) \subseteq Z \setminus -\text{int}C] \Rightarrow [G(y,x) + l\, B_Z(0, d(x,y)) \subseteq -C]$.

**Định nghĩa 1.5:** Cho $A$ và $B$ là hai tập con trong không gian mêtric $X$, khoảng cách Hausdorff giữa hai tập $A, B$ là $H(A,B) = \max\{H^*(A,B),\ H^*(B,A)\}$,với $H^*(A,B) := \sup\{d(a,B) : a \in A\}$ và $d(a,B) := \inf\{d(a,b) : b \in B\}$.

Phần còn lại của bài báo này có cấu trúc như sau. Mục 2, ta thiết lập điều kiện đủ tính duy nhất địa phương và tính Lipschitz địa phương của tập nghiệm của hai bài toán $(SVEP_1)$ và $(SVEP_2)$. Mục 3 đưa ra một số ứng dụng của các kết quả trong Mục 2 vào các trường hợp đặc biệt của $(SVEP_1)$ và $(SVEP_2)$.

## 2 SỰ DUY NHẤT ĐỊA PHƯƠNG VÀ TÍNH LIÊN TỤC LIPSCHITZ CỦA NGHIỆM CÁC BÀI TOÁN $(\mathbf{SVEP_1})$ VÀ $(\mathbf{SVEP_2})$

Cho $X, Y, Z$ là các không gian vectơ mêtric và $\Lambda, M$ là các không gian mêtric. Giả sử $S_1(\lambda,\mu) \neq \emptyset$, $S_2(\lambda,\mu) \neq \emptyset$ với mọi $\lambda$ trong lân cận của $\lambda_0 \in \Lambda$ và với mọi $\mu$ trong lân cận của $\mu_0 \in M$. Đặt $B_Z(0,\rho) := \{z \in Z : d(0,z) < \rho\}, \forall \rho > 0$, với $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X \times Y$, $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := d(x_1,x_2) + d(y_1,y_2)$ là mêtric trên $X \times Y$.

**Định lý 2.1:** *Giả sử đối với bài toán $(SVEP_1)$} các điều kiện sau được nghiệm đúng,*

(i) *$S$ và $T$ liên tục Lipschitz địa phương tại $\lambda_0$;*

(ii) *tồn tại lân cận $U$ của $\mu_0$ sao cho với mọi $\mu \in U$, $F(.,.,.,\mu)$ tựa đơn điệu loại 1 và $l_1$-*

*Lipschitz giả đơn điệu mạnh loại 1 trên $S(\lambda)$, $G(.,.,.,\mu)$ tựa đơn điệu loại 1 và $l_2$-*

*Lipschitz giả đơn điệu mạnh loại 1 trên $T(\lambda)$;*

(iii) *tồn tại lân cận N của $\lambda_0$ sao cho với mỗi $\lambda \in N$ và $(x,y) \in S(\lambda) \times T(\lambda)$, $F(x,.,.,.)$ và $G(.,y,.,.)$ lần lượt là $h_1.m_1.n_1$ -Lipschitz và $h_2.m_2.n_2$- Lipschitz địa phương trên $S(\lambda) \times T(\lambda) \times U(\mu_0)$ với $l_1 l_2 > m_1 h_2$.*

*Khi đó, nghiệm của $(SVEP_1)$ là duy nhất và liên tục Lipschitz địa phương tại $(\lambda_0,\mu_0)$, nghĩa là với $(\lambda_1,\mu_1)$ và $(\lambda_2,\mu_2)$ trong một lân cận của $(\lambda_0,\mu_0)$, ta có*

$$d\big((x,y)(\lambda_1,\mu_1),(x,y)(\lambda_2,\mu_2)\big) \leq k d(\lambda_1,\lambda_2) + l\, d(\mu_1,\mu_2), \tag{1}$$

*với $(x,y)(\lambda,\mu) := (x(\lambda,\mu), y(\lambda,\mu))$ là nghiệm duy nhất của $(SVEP_1)$ tại $(\lambda,\mu)$.*

*Chứng minh.*

**Bước 1:** *Chứng minh nghiệm của $(SVEP_1)$ là duy nhất*. Với $(\lambda,\mu) \in N \times U$, nếu $(\bar{x}_0,\bar{y}_0) \in S_1(\lambda,\mu)$ thì với mọi $(x,y) \in S(\lambda) \times T(\lambda)$, $F(\bar{x}_0,\bar{y}_0,x,\mu) \nsubseteq -\text{int}C$ và $G(\bar{x}_0,\bar{y}_0,y,\mu) \nsubseteq -\text{int}C$.

Do (ii), với mọi $(x,y) \in S(\lambda) \times T(\lambda)$, $(x,y) \neq (\bar{x}_0,\bar{y}_0)$, ta có

$F(x,\bar{y}_0,\bar{x}_0,\mu) + l_1 B_Z\big(0; d(\bar{x}_0,x)\big) \subseteq -C,$

$G(\bar{x}_0, y, \bar{y}_0, \mu) + l_2 B_Z(0; d(\bar{y}_0, y)) \subseteq -C.$

Do đó, với mọi $(x,y) \in S(\lambda) \times T(\lambda) \setminus \{(\bar{x}_0, \bar{y}_0)\}$, $F(x, \bar{y}_0, \bar{x}_0, \mu) \subseteq -\text{int}C$ và $G(x, y, \bar{y}_0, \mu) \subseteq -\text{int}C$, tức là $(x,y) \notin S_1(\lambda, \mu)$. Vì thế, nghiệm của $(SVEP_1)$ là duy nhất.

**Bước 2:** *Chứng minh* $S_1$ *liên tục Lipschitz địa phương tại* $(\lambda_0, \mu_0)$. Lấy $(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2) \in N(\lambda_0) \times U(\mu_0)$. Vì $(x,y)(\lambda_1, \mu_1) \in S_1(\lambda_1, \mu_1)$, ta có

$$F(x(\lambda_1,\mu_1), y(\lambda_1,\mu_1), x(\lambda_1,\mu_2), \mu_1) \nsubseteq -\text{int}C, \quad (2)$$

$$G(x(\lambda_1,\mu_1), y(\lambda_1,\mu_1), y(\lambda_1,\mu_2), \mu_1) \nsubseteq -\text{int}C. \quad (3)$$

Từ (2), (3) và giả thiết (ii), ta có:

$$F(x(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_1), x(\lambda_1,\mu_1), \mu_1) + l_1 B_Z(0; d(x(\lambda_1,\mu_1), x(\lambda_1,\mu_2))) \subseteq -C,$$

$$G(x(\lambda_1,\mu_1), y(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_1), \mu_1) + l_2 B_Z\left(0; d\left(y(\lambda_1,\mu_1), y(\lambda_1,\mu_2)\right)\right) \subseteq -C.$$

Do đó, với mọi $z \notin -\text{int}C$,

$$d\left(x(\lambda_1,\mu_1), x(\lambda_1,\mu_2)\right) \leq \frac{1}{l_1} H(F(x(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_1), x(\lambda_1,\mu_1), \mu_1), \{z\}), \quad (4)$$

$$d\left(y(\lambda_1,\mu_1), y(\lambda_1,\mu_2)\right) \leq \frac{1}{l_2} H(G(x(\lambda_1,\mu_1), y(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_1), \mu_1), \{z\}), \quad (5)$$

với $H(.,.)$ là khoảng cách Hausdorff.

Vì $(x,y)(\lambda_1,\mu_2) \in S_1(\lambda_1,\mu_2)$, nên tồn tại $z_1 \in F(x(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_2), x(\lambda_1,\mu_1), \mu_2)$ và $z_2 \in G(x(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_1), \mu_2)$, với $z_{1,2} \notin -\text{int}C$.

Ta có:

$$H(F(x(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_1), x(\lambda_1,\mu_1), \mu_1), \{z_1\}) \leq$$

$$\leq H\left(F(x(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_1), x(\lambda_1,\mu_1), \mu_1), F(x(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_2), x(\lambda_1,\mu_1), \mu_2)\right), \quad (6)$$

và

$$H(G(x(\lambda_1,\mu_1), y(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_1), \mu_1), \{z_2\}) \leq$$

$$\leq H\left(G(x(\lambda_1,\mu_1), y(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_1), \mu_1), F(x(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_1), \mu_2)\right). \quad (7)$$

Theo giả thiết (iii) và từ (6), (7) ta suy ra

$$d\left(x(\lambda_1,\mu_1), x(\lambda_1,\mu_2)\right) \leq \frac{1}{l_1} H(F(x(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_1), x(\lambda_1,\mu_1), \mu_1),$$

$$F(x(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_2), x(\lambda_1,\mu_1), \mu_2)) \leq \frac{1}{l_1}\left[m_1\, d\left(y(\lambda_1,\mu_1), y(\lambda_1,\mu_2)\right) + n_1 d(\mu_1,\mu_2)\right],$$

và

$$d\left(y(\lambda_1,\mu_1), y(\lambda_1,\mu_2)\right) \leq \frac{1}{l_2} H(G(x(\lambda_1,\mu_1), y(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_1), \mu_1),$$

$$G(x(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_1), \mu_2)) \leq \frac{1}{l_2}\left[k_2\, d(x(\lambda_1,\mu_1), x(\lambda_1,\mu_2)) + n_2\, d(\mu_1,\mu_2)\right].$$

Do đó,

$$d\left(x(\lambda_1,\mu_1), x(\lambda_1,\mu_2)\right) \leq \frac{m_1}{l_1} d(y(\lambda_1,\mu_1), y(\lambda_1,\mu_2)) + \frac{n_1}{l_1} d(\mu_1,\mu_2)$$

$$\leq \frac{m_1 h_2}{l_1 l_2}\ d(x(\lambda_1,\mu_1), x(\lambda_1,\mu_2)) + \frac{m_1 n_2}{l_1 l_2}\ d(\mu_1,\mu_2) + \frac{n_1}{l_1} d(\mu_1,\mu_2),$$

và

$$d\big(x(\lambda_1,\mu_1), x(\lambda_1,\mu_2)\big) \leq \frac{m_1 n_2 + n_1 l_2}{l_1 l_2 - m_1 h_2} d(\mu_1,\mu_2).$$

Tương tự, ta có

$$d\big(y(\lambda_1,\mu_1), y(\lambda_1,\mu_2)\big) \leq \frac{n_1 h_2 + l_1 n_2}{l_1 l_2 - m_1 h_2} d(\mu_1,\mu_2).$$

Từ đó, ta suy ra

$$\begin{aligned} d\big((x,y)(\lambda_1,\mu_1),(x,y)(\lambda_1,\mu_2)\big) &= d(x(\lambda_1,\mu_1), x(\lambda_1,\mu_2)) + d(y(\lambda_1,\mu_1), y(\lambda_1,\mu_2)) \\ &\leq \frac{m_1 n_2 + n_1 l_2}{l_1 l_2 - m_1 h_2}\ d(\mu_1,\mu_2) + \frac{n_1 h_2 + l_1 n_2}{l_1 l_2 - m_1 h_2} d(\mu_1,\mu_2) \\ &\leq l\, d(\mu_1,\mu_2), \end{aligned} \tag{8}$$

với $l := \frac{m_1 n_2 + n_1 l_2 + n_1 h_2 + l_1 n_2}{l_1 l_2 - m_1 h_2}$.

Bây giờ ta ước lượng cho $d\big((x,y)(\lambda_1,\mu_2),(x,y)(\lambda_2,\mu_2)\big)$. Ta xét hai trường hợp sau:

Nếu $F(x(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_2), x(\lambda_2,\mu_2),\mu_2) \nsubseteq -\mathrm{int}C$, thì từ giả thiết (ii) ta có,

$$F(x(\lambda_2,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_2), x(\lambda_1,\mu_2),\mu_2) + l_1 B\Big(0; d\big(x(\lambda_1,\mu_2), x(\lambda_2,\mu_2)\big)\Big) \subseteq -C.$$

Vì thế, với mọi $z \notin -\mathrm{int}C$,

$$d\big(x(\lambda_1,\mu_2), x(\lambda_2,\mu_2)\big) \leq \frac{1}{l_1} H(F(x(\lambda_2,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_2), x(\lambda_1,\mu_2),\mu_2),\{z\}). \tag{9}$$

Do $S$ liên tục Lipschitz tại $\lambda_0$, nên tồn tại $\bar{x} \in S(\lambda_2)$ sao cho $d(x(\lambda_1,\mu_2),\bar{x}) \leq L_1 d(\lambda_1,\lambda_2)$. Vì $(x,y)(\lambda_2,\mu_2) \in S_1(\lambda_2,\mu_2)$, có $\bar{z} \in F(x(\lambda_2,\mu_2), y(\lambda_2,\mu_2)\bar{x},\mu_2), \bar{z} \notin -\mathrm{int}C$. Giả thiết (ii), (iii) và (9) cho ta

$$\begin{aligned} d\big(x(\lambda_1,\mu_2), x(\lambda_2,\mu_2)\big) &\leq \frac{1}{l_1} H(F(x(\lambda_2,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_2), x(\lambda_1,\mu_2),\mu_2),\{\bar{z}\}) \\ &\leq \frac{1}{l_1} H(F(x(\lambda_2,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_2), x(\lambda_1,\mu_2),\mu_2), F(x(\lambda_2,\mu_2), y(\lambda_2,\mu_2),\bar{x},\mu_2)) \\ &\leq \frac{m_1}{l_1}\ d(y(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_2,\mu_2)) + \frac{h_1}{l_1} d(x(\lambda_1,\mu_2),\bar{x}) \\ &\leq \frac{m_1}{l_1}\ d(y(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_2,\mu_2)) + \frac{h_1 L_1}{l_1} d(\lambda_1,\lambda_2). \end{aligned}$$

Nếu $F(x(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_2), x(\lambda_2,\mu_2),\mu_2) \subseteq -\mathrm{int}C$, thì từ (ii) ta có $F(x(\lambda_2,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_2)\ x(\lambda_1,\mu_2),\mu_2) \nsubseteq -\mathrm{int}C$ và do đó,

$$F(x(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_2),\ x(\lambda_2,\mu_2),\mu_2) + l_1 B(0; d(x(\lambda_1,\mu_2), x(\lambda_2,\mu_2))) \subseteq -C.$$

Từ đó ta thấy rằng, với mọi $z \notin -\mathrm{int}C$,

$$d\big(x(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2)\big) \le \frac{1}{l_1} H(F(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2),\mu_2),\{z\}). \tag{10}$$

Áp dụng (i), ta suy ra tồn tại $\hat{x} \in S(\lambda_1)$, sao cho $d(x(\lambda_2,\mu_2),\hat{x}) \le L_1\, d(\lambda_1,\lambda_2)$.

Vì $(x,y)(\lambda_1,\mu_2) \in S_1(\lambda_1,\mu_2)$ nên có $\hat{z} \in F(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),\hat{x},\mu_2), \hat{z} \notin -\mathrm{int}C$. Từ điều này, (ii), (iii) và (10) suy ra

$$\begin{aligned}
d\big(x(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2)\big) &\le \frac{1}{l_1} H(F(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2),\mu_2),\{\hat{z}\}) \\
&\le \frac{1}{l_1} H\big(F(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2),\mu_2),F(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),\hat{x},\mu_2)\big) \\
&\le \frac{h_1}{l_1} d(x(\lambda_2,\mu_2),\hat{x}) \le \frac{h_1 L_1}{l_1} d(\lambda_1,\lambda_2).
\end{aligned}$$

Như vậy, ta luôn có

$$d\big(x(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2)\big) \le \frac{m_1}{l_1} d\big(y(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_2,\mu_2)\big) + \frac{h_1 L_1}{l_1} d(\lambda_1,\lambda_2).$$

Lý luận tương tự như trên, ta cũng có

$$d\big(y(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_2,\mu_2)\big) \le \frac{h_2}{l_2} d\big(x(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2)\big) + \frac{m_2 L_2}{l_2} d(\lambda_1,\lambda_2).$$

Vì thế,

$$\begin{aligned}
&d\big(x(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2)\big) \\
&\quad \le \frac{m_1 h_2}{l_1 l_2} d\big(x(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2)\big) + \frac{m_1 m_2 L_2}{l_1 l_2} d(\lambda_1,\lambda_2) + \frac{h_1 L_1}{l_1} d(\lambda_1,\lambda_2),
\end{aligned}$$

tức là

$$d\big(x(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2)\big) \le \frac{h_1 l_2 L_1 + m_1 m_2 L_2}{l_1 l_2 - m_1 h_2} d(\lambda_1,\lambda_2).$$

Lý luận hoàn toàn tương tự, ta có

$$d\big(y(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_2,\mu_2)\big) \le \frac{h_1 h_2 L_1 + m_2 l_1 L_2}{l_1 l_2 - m_1 h_2} d(\lambda_1,\lambda_2).$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
d((x,y)(\lambda_1,\mu_2),(x,y)(\lambda_2,\mu_2)) &= d(x(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2)) + d(y(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_2,\mu_2)) \\
&\le \frac{h_1 l_2 L_1 + m_1 m_2 L_2 + h_1 h_2 L_1 + m_2 l_1 L_2}{l_1 l_2 - m_1 h_2} d(\lambda_1,\lambda_2) \\
&\le k\, d(\lambda_1,\lambda_2),
\end{aligned} \tag{11}$$

với $k := \frac{h_1 l_2 L_1 + m_1 m_2 L_2 + h_1 h_2 L_1 + m_2 l_1 L_2}{l_1 l_2 - m_1 h_2}$.

Do (8) và (11), ta suy ra

$$d((x,y)(\lambda_1,\mu_1),(x,y)(\lambda_2,\mu_2)) \le d((x,y)(\lambda_1,\mu_1),(x,y)(\lambda_1,\mu_2)) +$$

$$d((x,y)(\lambda_1,\mu_2),(x,y)(\lambda_2,\mu_2)) \leq k\, d(\lambda_1,\lambda_2) + l\, d(\mu_1,\mu_2).$$

Do đó, $S_1(.,.)$ liên tục Lipschitz địa phương tại $(\lambda_0,\mu_0)$.

Thí dụ sau đây cho thấy rằng giả thiết đơn điệu mạnh loại 1 trong Định lý 2.1 là cốt yếu.

**Thí dụ 2.1:** Cho
$X = Y = Z = K = D = R, \Lambda = M = [1,2], S(\lambda) = [\lambda - 1,1], G(.,.,.) = C = R^+, F(x,y,\lambda) = (-\infty, |\lambda x|^{\frac{1}{2}}(|x|^{1/4} - y)]$

Dễ dàng thấy rằng $S(.)$ liên tục Lipschitz tại bất kì $\lambda_0 \in \Lambda$, $F(x,y,.)$ là 1-Lipschitz trên $S(\Lambda)$. $F(.,.,\lambda)$ tựa đơn điệu loại 1 trên $S(\Lambda) = [0,1]$ vì với mọi $\lambda \in \Lambda, x,y \in S(\lambda)$ và $(\lambda x)^{1/2}\left(x^{\frac{1}{4}} - y\right) < 0$ thì $y - x^{1/4} \geq 0$ suy ra $y^{1/4} - x \geq 0$ nên $(\lambda y)^{\frac{1}{2}}\left(y^{\frac{1}{4}} - x\right) \geq 0$ hay $F(y,x,\lambda) \nsubseteq -\mathrm{int}C$. Tính toán trực tiếp ta có tập nghiệm của bài toán là $S(\lambda) = 1$ với mọi $\lambda \in (1,2]$ và $S(1) = \{0,1\}$. Do đó nghiệm của bài toán không duy nhất và không liên tục tại $\lambda = 1$. Lý do là $F$ không nghiệm đúng điều kiện tính Lipschitz giả đơn điệu mạnh loại 1. Thật vậy, với $\lambda_0 = 1$, $x = 1, y = 0$ thì $F(1,0,1) = (-\infty,1] \nsubseteq -\mathrm{int}C$ nhưng với $h > 0$ bất kì thì $F(0,1,1) + hB(0,1) = (-\infty,0) + hB(0,1) = (-\infty,h) \nsubseteq -C$.

Bằng các lập luận hoàn toàn tương tự như trong chứng minh của Định lý 2.1, ta cũng có kết quả tương tự cho bài toán $(SVEP_2)$ sau đây.

**Định lý 2.2:** *Xét bài toán $(SVEP_2)$. Giả sử các giả thiết (i), (iii) ở Định lí 2.1 được nghiệm đúng và điều kiện* (ii) *được thay thế bằng điều kiện* (ii') *như sau.*

(ii') *tồn tại lân cận $U$ của $\mu_0$ sao cho với mọi $\mu \in U$, $F(.,.,.,\mu)$ tựa đơn điệu loại 2 và $l_1$- Lipschitz giả đơn điệu mạnh loại 2 trên $S(\lambda)$, $G(.,.,.,\mu)$ tựa đơn điệu loại 2 và $l_2$- Lipschitz giả đơn điệu mạnh loại 2 trên $T(\lambda)$.*

*Khi đó, nghiệm của bài toán $(SVEP_2)$ duy nhất và liên tục Lipschitz địa phương tại $(\lambda_0,\mu_0)$.*

Thí dụ sau đây chỉ ra rằng giả thiết đơn điệu mạnh loại 2 trong Định lý 2.2 là không bỏ được.

**Thí dụ 2.2:** Cho $X, Y, Z, K, D, \Lambda, M, G, C$ và $S$ giống như trong Thí dụ 2.1 và

$F(x,y,\lambda) = [\lambda^{\frac{1}{2}} x(x - y^2), +\infty)$.

Khi đó, $S(.)$ và $F(x,y,.)$ thỏa mãn các tính chất giống như trong Thí dụ 2.1. $F(x,y,.)$ cũng thỏa mãn điều kiện giả đơn điệu loại 2. Ta cũng có tập nghiệm của bài toán là $S(\lambda) = 1$ với mọi $\lambda \in (1,2]$ và $S(1) = \{0,1\}$. Do đó nghiệm của bài toán không duy nhất và không liên tục tại $\lambda = 1$. Lí do là $F(.,.,\lambda)$ không nghiệm đúng điều kiện tính Lipschitz giả đơn điệu mạnh loại 2. Thật vậy, lấy $\lambda_0 = 1, x = 1, y = 0$ thì $F(1,0,1) = [1,+\infty) \subseteq [0,+\infty)$, nhưng với $h > 0$ bất kỳ thì $F(0,1,1) + hB(0,1) = [0,+\infty) + hB(0,1) = (h,+\infty) \nsubseteq (-\infty,0]$.

## 3 ÁP DỤNG

### 3.1 Bài toán cân bằng đối xứng đơn trị

Khi $F$ và $G$ là ánh xạ đơn trị thì $(SVEP_1)$ và $(SVEP_2)$ trở thành bài toán cân bằng đối xứng. *(SVEP):* Tìm $(\bar{x},\bar{y}) \in K \times D$ sao cho $\bar{x} \in S(\lambda), \bar{y} \in T(\lambda)$ và $\forall (x,y) \in S(\lambda) \times T(\lambda)$,

$$F(\bar{x},\bar{y},x,\mu) \in (Z \setminus -\mathrm{int}C),\ G(\bar{x},\bar{y},y,\mu) \in (Z \setminus -\mathrm{int}C).$$

Từ các Định lý 2.1 và 2.2 ta có kết quả sau.

**Hệ quả 3.1:** *Giả sử rằng*

(i) *$S$ và $T$ liên tục Lipschitz địa phương tại $\lambda_0$;*

(ii) *tồn tại lân cận $U$ của $\mu_0$ sao cho $\forall \mu \in U, F, G$ tựa đơn điệu loại 1 trên $S(\lambda) \times T(\lambda), F$ và $G$ lần lượt là $l_1$-Lipschitz và $l_2$-Lipschitz giả đơn điệu mạnh loại 1 trên $S(\lambda) \times T(\lambda)$;*

(iii) *tồn tại lân cận $N$ của $\lambda_0$ sao cho với mỗi $\lambda \in N$ và $(x,y) \in S(\lambda) \times T(\lambda)$, $F(x,.,.,.)$ và $G(.,y,.,.)$ liên tục Lipschitz địa phương trên $S(\lambda) \times T(\lambda)$.*

*Khi đó, nghiệm bài toán (SVEP) là duy nhất và liên tục Lipschitz địa phương tại $(\lambda_0,\mu_0)$.*

### 3.2 Bài toán bất đẳng thức biến phân đối xứng tổng quát

Xét $X,Y,Z,K,D,C,S,T$ như ở phần Mở đầu. Hơn nữa, giả sử $C$ là nón lồi và có đỉnh. Đặt $f,g: K \times D \times M \to 2^Z$ là các ánh xạ đơn trị. Ta xét bài toán

(*GSVIP*): Tìm $(\bar{x},\bar{y}) \in K \times D$ sao cho $\bar{x} \in S(\lambda), \bar{y} \in T(\lambda)$, và

$f(x,\bar{y},\mu) - f(\bar{x},\bar{y},\mu) \notin -\mathrm{int}C, \forall x \in S(\lambda)$,

$g(\bar{x},y,\mu) - g(\bar{x},\bar{y},\mu) \notin -\mathrm{int}C, \forall y \in T(\lambda)$.

Đặt $F(\bar{x},\bar{y},x,\mu) := f(x,\bar{y},\mu) - f(\bar{x},\bar{y},\mu)$ và $G(\bar{x},\bar{y},y,\mu) := g(\bar{x},y,\mu) - g(\bar{x},\bar{y},\mu)$.

Kết quả sau đây được suy ra trực tiếp từ Định lý 2.1.

**Hệ quả 3.2:** *Giả sử đối với* (*GSVIP*)*, ta có*

(i) *$S$ và $T$ liên tục Lipschitz địa phương tại $\lambda_0$;*

(ii) *tồn tại lân cận $U$ của $\mu_0$ sao cho, với mọi $(x,y),(\hat{x},\hat{y}) \in S(N(\lambda_0)) \times T(N(\lambda_0))$,*

$x \neq \hat{x}, y \neq \hat{y}, \forall \mu \in U(\mu_0)$,

$[f(\hat{x},y) - f(x,y) \notin -\mathrm{int}C] \Rightarrow [f(x,y) - f(\hat{x},y) + l_1 B_Z(0;d(x,\hat{x})) \in -C]$,

$[g(x,\hat{y}) - g(x,y) \notin -\mathrm{int}C] \Rightarrow [g(x,y) - g(x,\hat{y}) + l_2 B_Z(0;d(y,\hat{y})) \in -C]$,

*với $l_1, l_2 > 0$;*

(iii) *tồn tại lân cận $N$ của $\lambda_0$ sao cho với mỗi $\lambda \in N$ và $(x,y) \in S(\lambda) \times T(\lambda)$,*

*$F(x,.,.,.)$ và $G(.,y,.,.)$ liên tục Lipschitz tức là,*
$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in S(\lambda) \times T(\lambda), \forall \mu_1,\mu_2 \in U(\mu_0)$,

$d\big(F(x_1,y_1,\mu_1),F(x_2,y_2,\mu_2)\big) \le h_1\, d(x_1,x_2) + m_1\, d(y_1,y_2) + n_1\, d(\mu_1,\mu_2),$

$d\big(G(x_1,y_1,\mu_1),G(x_2,y_2,\mu_2)\big) \le h_2\, d(x_1,x_2) + m_2\, d(y_1,y_2) + n_2\, d(\mu_1,\mu_2),$

*với* $h_{1,2}, m_{1,2}, n_{1,2} > 0,\ l_1 l_2 > m_1 h_2.$

*Khi đó, nghiệm của* (*GSVIP*) *là duy nhất và liên tục Lipschitz địa phương tại* $(\lambda_0,\mu_0)$.

### 3.3 Bài toán cân bằng

Xét $X,Y,Z,K,D,C,T$ như trong phần Mở đầu. Đặt $F(x,y,\bar{x},\mu) \equiv F(x,\bar{x},\mu)$ và $G(x,\bar{y},y,\mu) \equiv C$. Khi đó, $(SVEP_1)$ và $(SVEP_2)$ trở thành bài toán cân bằng vectơ được nhiều nhà toán học quan tâm đến.

(WEP): Tìm $\bar{x} \in S(\lambda)$ sao cho với mọi $x \in S(\lambda)$,

$$F(\bar{x},x,\mu) \cap (Z \setminus -\mathrm{int}C) \neq \emptyset.$$

(SEP): Tìm $\bar{x} \in S(\lambda)$ sao cho với mọi $x \in S(\lambda)$,

$$F(\bar{x},x,\mu) \subseteq (Z \setminus -\mathrm{int}C).$$

Với $(\lambda,\mu) \in \Lambda \times M$, ta kí hiệu $S^w(\lambda,\mu)$ và $S^s(\lambda,\mu)$ lần lượt là tập nghiệm của (WEP) và (SEP). Hai hệ quả sau đây được suy ra từ các Định lí 2.1 và 2.2.

**Hệ quả 3.3** *Giả sử đối với (WEP), ta có:*

(i) $S$ *liên tục Lipschitz địa phương tại* $\lambda_0$;

(ii) *tồn tại lân cận* $U$ *của* $\mu_0$ *sao cho với mọi* $\mu \in U$, $F(.,.,\mu)$ *tựa đơn điệu loại 1 và* $l$- *Lipschitz giả đơn điệu mạnh loại 1 trên* $S(\lambda)$;

(iii) *tồn tại lân cận N của* $\lambda_0$ *sao cho với mỗi* $\lambda \in N$ *và* $x \in S(\lambda), F(x,.,.)$ *là* $h.m$- *Lipschitz địa phương trên* $S(\lambda) \times U(\mu_0)$.

*Khi đó, nghiệm của (WEP) là duy nhất và* $S^w$ *liên tục Lipschitz địa phương tại* $(\lambda_0,\mu_0)$, *tức là với* $(\lambda_1,\mu_1)$ *và* $(\lambda_2,\mu_2)$ *trong một lân cận của* $(\lambda_0,\mu_0)$, *thì*

$d\big(x(\lambda_1,\mu_1),x(\lambda_2,\mu_2)\big) \le kd(\lambda_1,\lambda_2) + ld(\mu_1,\mu_2),$

*với* $x(\lambda,\mu)$ *là nghiệm duy nhất của (WEP) tại* $(\lambda,\mu)$.

**Hệ quả 3.4:** Xét bài toán (SEP). *Giả sử rằng các điều kiện sau đây được thỏa mãn*

(i) $S$ *liên tục Lipschitz địa phương tại* $\lambda_0$;

(ii) *tồn tại lân cận* $U$ *của* $\mu_0$ *sao cho với mọi* $\mu \in U$, $F(.,.,\mu)$ *tựa đơn điệu loại 2 và* $l$- *Lipschitz giả đơn điệu mạnh loại 2 trên* $S(\lambda)$;

(iii) *tồn tại lân cận* $N$ *của* $\lambda_0$ *sao cho với mỗi* $\lambda \in N$ *và* $x \in S(\lambda), F(x,.,.)$ *là* $h.m$- *Lipschitz địa phương trên* $S(\lambda) \times U(\mu_0)$.

*Khi đó, nghiệm của (SEP) là duy nhất và* $S^s$ *liên tục Lipschitz địa phương tại* $(\lambda_0,\mu_0)$.

## 4 KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi đã sử dụng các tính đơn điệu suy rộng của hàm đa trị để nghiên cứu sự duy nhất và tính liên tục Lipschitz của ánh xạ nghiệm bài toán cân bằng đối xứng đa trị. Mô hình bài toán cân bằng đối xứng đa trị chứa nhiều bài toán quan trọng trong lý thuyết tối ưu như bài toán cân bằng, bài toán tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm bất động, bài toán điểm trùng, bài toán lý thuyết trò chơi,… Do đó, các kết quả trong Mục 2 sẽ suy ra các kết quả tương ứng khi áp dụng vào các trường hợp đặc biệt đó. Ở đây, chúng tôi chỉ áp dụng các kết quả trong Mục 2 cho bài toán cân bằng đối xứng đơn trị, bài toán bất đẳng thức biến phân đối xứng tổng quát và bài toán cân bằng làm thí dụ minh họa. Hơn nữa, theo định lý Rademacher thì một hàm số liên tục Lipschitz trong $R^n$ là hàm số khả vi hầu khắp nơi, do đó tính liên tục Lipschitz rất gần với tính khả vi. Đây là một vấn đề mở chưa được đề cập đến cho rất nhiều lớp bài toán trong tối ưu hóa.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


L.Q. Anh, P.Q. Khanh, Semicontinuity of the solution set of parametric multivalued vector quasiequilibrium problems, J. Math. Anal. Appl. 294 (2004), 699-711.

L. Q. Anh and P. Q. Khanh, On the Hölder continuity of solutions to parametric multivalued vector equilibrium problems, J. Math. Anal. Appl. 321 (2006), 308-315.

L. Q. Anh and P. Q. Khanh, Uniqueness and Hölder continuity of the solution to multivalued equilibrium problems in metric spaces, J. Glob. Optim. 37 (2007), 449-465.

L. Q. Anh and P. Q. Khanh, Various kinds of semicontinuity and the solution sets of parametric multivalued symmetric vector quasiequilibrium problems, J. Glob. Optim. 41 (2008), 539-558.

L. Q. Anh and P. Q. Khanh, Hölder continuity of the unique solution to quasiequilibrium problems in metric spaces, J. Optim. Theory Appl. 41 (2009), 37-54.

L.Q. Anh, P.Q. Khanh, On the Hölder continuity of solutions to parametric multivalued vector equilibrium problems, J. Math. Anal. Appl. 321 (2006) 308–315.

D. Aussel, D.T. Luc, Existence conditions in general quasimonotone variational inequalities, Bull. Austral. Math. Soc., 71 (2005), 285-303.

M. Bianchi, R. Pini, Sensitivity for parametric vector equilibria, Optimization 55 (2006) 221-230.

E. Blum, W. Oettli, From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, Math. Student 63 (1994) 123-145.

J.Y. Fu, Symmetric vector quasiequilibrium problems, J. Math. Anal. Appl., 285 (2003), 708–713.

N.D. Yen, Hölder continuity of solutions to parametric variational inequalities, Appl. Math. Optim. 31 (1995) 245-255.

N.D. Yen, Lipschitz continuity of solutions of variational inequalities with a parametric polyhedral constraint, Math. Oper. Res. 20 (1995) 695-708.